EPFL

Session 2 – Les Principes de la théorie de la mesure

EE-390b TP en Conversion d’Énergie

Sylvain Robert, Simone Rametti

26.02.2025

Session 2

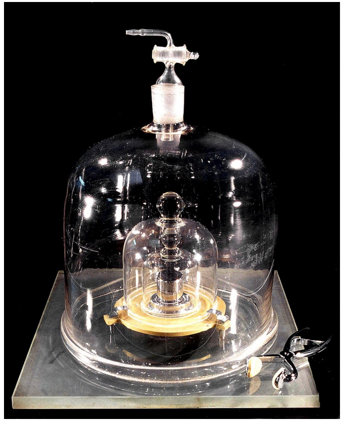
- Concepts de base
  - Erreur de mesure (aléatoire et systématique)
  - **Incertitude des mesures**
  - Évaluation des incertitudes des mesures électriques
  - Propagation de l'incertitude
- Statistiques appliquées aux mesures électriques
  - Fonction de densité de probabilité (pdf)
  - Représentation
  - Estimation de l'incertitude à partir de pdf
- Mesures électriques
  - Mesures de courant continu
  - Mesures de la tension continue
  - Mesures de résistance

Session 2

- Concepts de base
  - Erreur de mesure (aléatoire et systématique)
  - **Incertitude des mesures**
  - Évaluation des incertitudes des mesures électriques
  - Propagation de l'incertitude
- Statistiques appliquées aux mesures électriques
  - Fonction de densité de probabilité (pdf)
  - Représentation
  - Estimation de l'incertitude à partir de pdf
- Mesures électriques
  - Mesures de courant continu
  - Mesures de la tension continue
  - Mesures de résistance

Mesures

- Une mesure est un **processus relationnel** dans lequel les attributs d'un objet sont comparés aux mêmes attributs d'un objet de référence.
- Exemple:
  - le prototype international du kilogramme (référence pour le kilogramme de 1889 à 2019).
  - Conservé au Bureau international des poids et mesures (Paris).



Erreur de mesure

- La **valeur réelle** d'une grandeur physique est en principe **inconnue**.
- Dans la théorie de la mesure, l'erreur de mesure est définie par l'équation suivante :

$$e = \mu - \hat{x}$$

- Où μ représente la valeur réelle de la quantité testée et $\hat{x}$ le résultat d'une mesure particulière.
- Par conséquent, en tant que valeur réelle, l'erreur de mesure est en principe **inconnue**.
- Idéalement, l'erreur de mesure est divisée en **erreur aléatoire** et **erreur systématique**.

Erreur de mesure

- **Erreur aléatoire** : composante de l'erreur de mesure qui évolue de manière imprévisible lors de **mesures répétées**.
  - Exemple : mesure du volume de liquide dans une fiole de laboratoire.
  - Les erreurs aléatoires ne peuvent être supprimées mais peuvent être atténuées en augmentant le nombre d'observations (en supposant que l'erreur moyenne est nulle).

- **Erreur systématique** : composante de l'erreur de mesure qui, dans une série d'observations répétées, reste constante ou varie de manière prévisible.
  - Exemple : mesure de la résistance électrique d'un circuit à différentes températures ambiantes.
  - Les erreurs systématiques peuvent être réduites de manière significative en appliquant des procédures de correction (si leur origine est connue).

$$R = R_{ref}\left[1 + \alpha\left(T - T_{ref}\right)\right]$$

Incertitude de mesure

Définition

- L'incertitude **fait partie de la mesure**.
- Elle reflète l'absence de connaissance exacte de la valeur à mesurer.
- Selon le *“Guide to the Expression of Uncertainty in Measurement”* [1] (GUM), elle est définie comme suit :
  - *A parameter, associated with the result of a measurement that characterizes the dispersion of the values that could reasonably be attributed to the measurand.*
  - *Un paramètre associé au résultat d'un mesurage (d’une mesure) qui caractérise la dispersion des valeurs qui pourraient raisonnablement être attribuées au mesurande (objet mesuré).*
- Elle souligne la nécessité d'un cadre probabiliste.
- **Incertitudes de type A** : dont l'ampleur est une estimation dérivée de **l'analyse statistique** des données expérimentales.
- **Incertitudes de type B** : dont l'évaluation ne peut reposer sur la disponibilité d'un nombre représentatif de mesures.

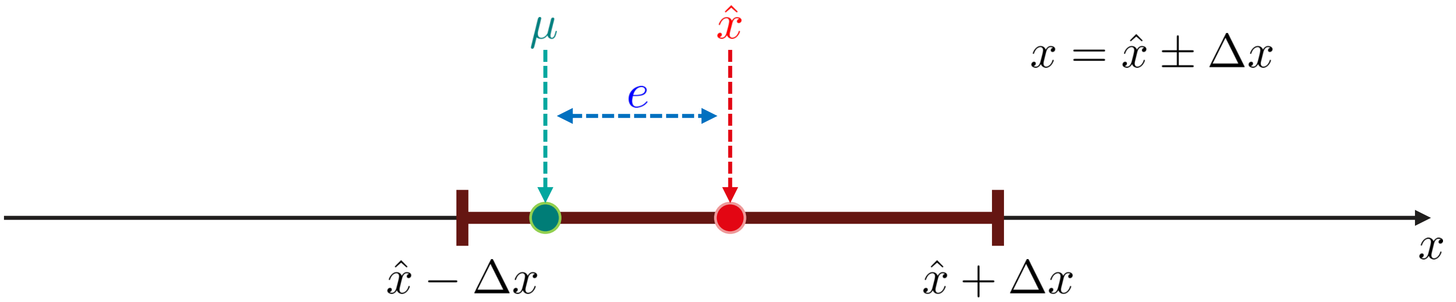
[1] BIPM, IEC, IFCC, ILAC, ISO, IUPAC, IUPAP and OIML, Evaluation of measurement data Guide to expression of uncertainty in measurement. JCGM 100:2008 (2008).

Incertitude de mesure

Définition

- Une mesure expérimental $\hat{x}$ est incomplète sans l'estimation de son incertitude :
  - Un intervalle Δx.
  - Probabilité de trouver une mesure dans l'intervalle (**incertitude élargie et facteur de couverture**).

$$P(\hat{x} - \Delta x \leq x \leq \hat{x} + \Delta x)$$



$$x = \hat{x} \pm \Delta x$$

Incertitude de mesure

Exemple du Type A

- **Incertitude de Type A** : peut être appliquée lorsque l'on dispose d'un nombre significatif d'observations (n) de la même quantité X, prises dans des conditions similaires.
  - La meilleure estimation de X est représentée par la **moyenne arithmétique** $\bar{x}$.

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

  - La meilleure estimation de la **variance** associée au processus de mesure est la suivante :

$$s^2(x) = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2$$

  - The Central Limit Theorem (CLT, théorème de la limite centrale) stipule que la distribution de la moyenne arithmétique tend vers une gaussienne pour un grand nombre d'observations (indépendamment de la distribution des échantillons).
  - Vidéo intéressante sur la distribution normale et le théorème de la limite centrale here.
  - En conséquence du CLT, la meilleure estimation de **la variance de la moyenne arithmétique** est :

$$s^2(\bar{x}) = \frac{s^2(x)}{n}$$

Incertitude de mesure

Exemple du Type A

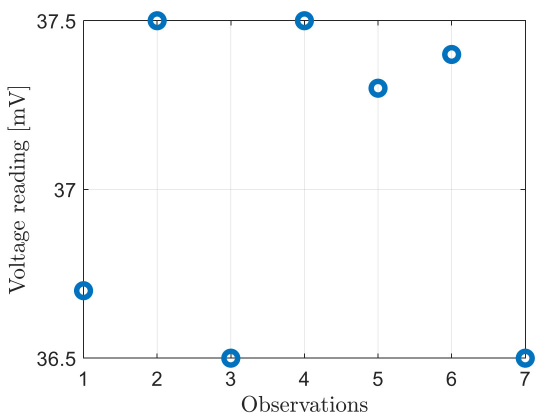
- La meilleure estimation de **la variance de la moyenne arithmétique** est :

$$s^2(\bar{x}) = \frac{s^2(x)}{n}$$

- **L'incertitude standard** $\mathrm{u}(\bar{x})$ associée à l'estimation $\bar{x}$ est **l'écart-type expérimental de la moyenne**.

$$u\left(\bar{x}\right) = s\left(\bar{x}\right) = \frac{s\left(x\right)}{\sqrt{n}}$$

Mesures par voltmètre [mV]						
36.7	37.5	36.5	37.5	37.3	37.4	36.5



Incertitude de mesure

Exemple du Type A

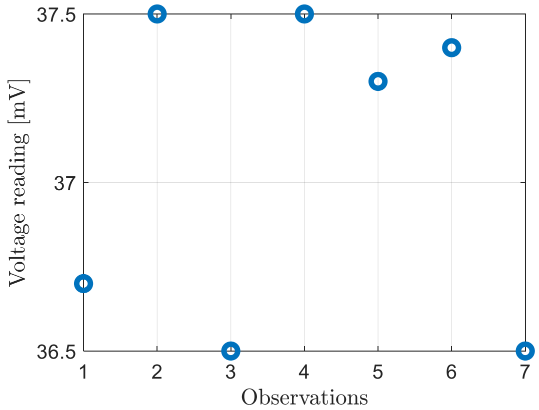
$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = 37.1\,\mathrm{mV}$$

$$s^2(x) = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 = 0.220\,\mathrm{mV}^2$$

$$s^2(\bar{x}) = \frac{s^2(x)}{n} = 0.031\,\mathrm{mV}^2$$

$$\boxed{u(\bar{x}) = s(\bar{x}) = 0.18\,\mathrm{mV}}$$ → Incertitude standard

$$\boxed{U(\bar{x}) = 3 \cdot u(\bar{x}) = 0.6\,\mathrm{mV}}$$ → Incertitude élargie (P = 99.7%)



Mesures par voltmètre [mV]						
36.7	37.5	36.5	37.5	37.3	37.4	36.5

Incertitude de mesure

Exemple du Type B

- **Incertitude de Type A** : ne peut être déduite de mesures répétées. L'information sur la variabilité du mesurande est obtenue en utilisant le *"jugement scientifique"*. Ce concept comprend :
  - Données obtenues précédemment dans des conditions similaires
  - Connaissance théorique ou expérimentale du comportement des instruments
  - **Spécifications techniques fournies par les fabricants d'instruments.**
  - Données d'étalonnage
- Comme pour le type A, l'évaluation de l'incertitude de type B consiste en une estimation de l'écart-type.

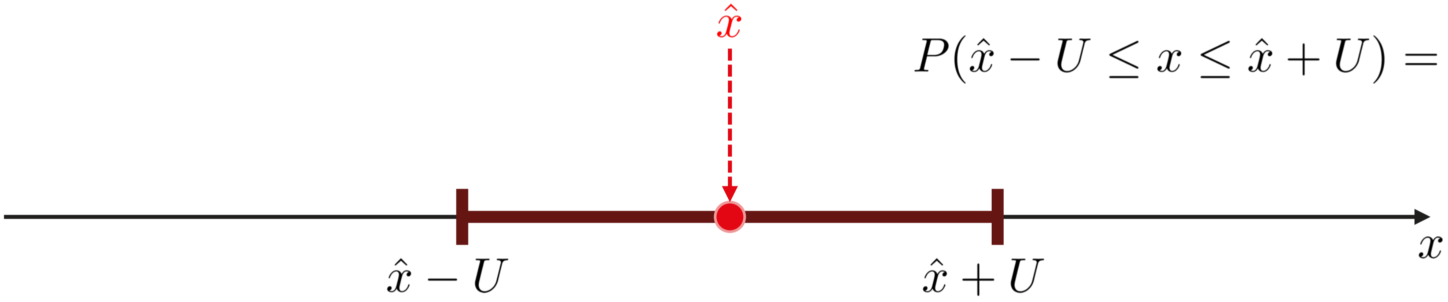
Incertitude de mesure

Exemple du Type B

- Mesure de la tension avec un multimètre numérique.
- Le fabricant de l'instrument fournit généralement **l'incertitude élargie** U.
  - U est l'incertitude telle que le mesurande est contenu avec une probabilité de 99 % dans l'intervalle de largeur $2U$ centré sur la valeur mesurée.
  - Dans l'hypothèse d'une distribution gaussienne des mesures obtenues avec l'instrument, l'incertitude élargie correspond à un **facteur de couverture** $k = 2.6$. L'incertitude-type est donc de :

$$u = \frac{U}{2.6}$$

$$P(\hat{x} - U \leq x \leq \hat{x} + U) = 99\,\%$$



Incertitude de mesure

Exemple du Type B

- Le manuel de l'instrument fournit des instructions pour calculer l'incertitude élargie pour chaque gamme de l'instrument. La procédure la plus courante est la suivante :

$$\pm\,(\text{percentage of the reading} + \text{number of } \textit{digits})$$

- Le nombre de *digits* indique la valeur du chiffre le moins significatif pour la plage utilisée.
- Les deux contributions sont indépendantes et **doivent être additionnés de manière quadratique** lors du calcul de l'incertitude totale de la mesure (ne pas les additionner linéairement).

$$U = \pm\sqrt{(\hat{x}\cdot k_{\%})^2 + (\text{digits})^2}$$

Incertitude de mesure

Exemple du Type B

1. DC Voltage Measurement

Range	Resolution	Accuracy
400.0mV	0.1mV	± (0.8%+3LSD)
4.000V	1mV	
40.00V	10mV	± (0.8%+1LSD)
400.0V	100mV	
600V	1V	±(1.0%+3LSD)

- Echelle : $400.0\,\mathrm{mV}$
- Résolution : $0.1\,\mathrm{mV}$
- Précision : $\pm(0.8\,\% + 3\,\mathrm{digits})$
- Incertitude élargie :

$$U = \pm\sqrt{(36.8\,\mathrm{mV}\cdot 0.8\,\%)^2 + (0.3\,\mathrm{mV})^2} = 0.4\,\mathrm{mV}$$

$$u = \frac{U}{2.6} = 0.16\,\mathrm{mV}$$

Propagation d'incertitude de mesure

Méthode

- L'incertitude peut être indiquée de deux manières :
  - **Incertitude absolue** : l'interval $\pm U$ centré sur la valeur mesurée $\hat{x}$ et avec la même unité.
  - **Incertitude relative** : elle est indiquée comme $\delta U = \frac{U}{\hat{x}}$. Elle fournit directement des informations sur la qualité de la mesure. Plus l'incertitude relative est faible, plus la mesure est précise.
- Supposons que nous ayons calculé une valeur $\hat{y}$ à partir de mesures multiples : $\hat{x}_1$, $\hat{x}_2$, $\hat{x}_3$, …, $\hat{x}_n$.

$$\hat{y} = f(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \hat{x}_3, \ldots, \hat{x}_n)$$

- Ensuite, l'incertitude associée à $\hat{y}$, U_y peut être dérivée de l'incertitude de chaque mesure $\hat{x}_i$, U_{x_i}.

$$U_y = \sum_{i=1}^{N} \left| \frac{\partial f}{\partial x_1} \right| \cdot U_{x_i}$$

- Le résultat peut alors être exprimé comme suit :

$$y = \hat{y} \pm U_y$$

Propagation d'incertitude de mesure

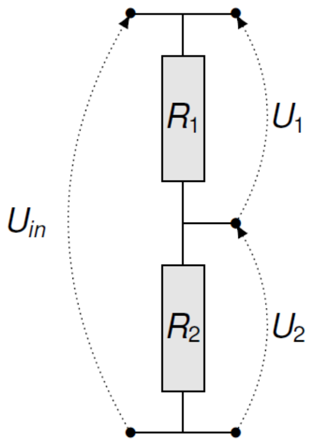
Méthode

- Sur la base de la fonction f, différentes méthodes sont utilisées pour calculer l'incertitude composée.

Function	Absolute Uncertainty	Relative Uncertainty
$f = \hat{x}_1 + \hat{x}_2$	$U_y = \mid U_{x_1} \mid + \mid U_{x_2} \mid$	-
$f = \hat{x}_1 - \hat{x}_2$	$U_y = \mid U_{x_1} \mid + \mid U_{x_2} \mid$	-
$f = \hat{x}_1 \cdot \hat{x}_2$	$U_y = \mid \hat{x}_2 \cdot U_{x_1} \mid + \mid \hat{x}_1 \cdot U_{x_2} \mid$	$\delta U_y = \frac{U_y}{\hat{y}} = \mid \delta U_{x_1} \mid + \mid \delta U_{x_2} \mid$
$f = \hat{x}_1 \div \hat{x}_2$	$U_y = \mid \frac{1}{\hat{x}_2} \cdot U_{x_1} \mid + \mid \frac{\hat{x}_1}{\hat{x}_2^2} \cdot U_{x_2} \mid$	$\delta U_y = \frac{U_y}{\hat{y}} = \mid \delta U_{x_1} \mid + \mid \delta U_{x_2} \mid$

Propagation d'incertitude de mesure

Exemple



Addition

$$\begin{cases} U_1 = (450.4 \pm 5.7)\,\mathrm{mV} \\ U_2 = (146.2 \pm 2.1)\,\mathrm{mV} \end{cases}$$

$$U_{in} = U_1 + U_2 = (596.6 \pm 7.8)\,\mathrm{mV}$$

Soustraction

$$\begin{cases} U_1 = (451.5 \pm 5.7)\,\mathrm{mV} \\ U_{in} = (584.2 \pm 7.3)\,\mathrm{mV} \end{cases}$$

$$U_2 = U_{in} - U_2 = (132.7 \pm 13.0)\,\mathrm{mV}$$

Multiplication et division

$$\begin{cases} U_{in} = (9.12 \pm 0.12)\,\mathrm{V} \\ R_1 = (100 \pm 1)\,\Omega \\ R_2 = (50 \pm 1)\,\Omega \end{cases}$$

$$U_2 = U_{in}\frac{R_2}{R_1+R_2} = (3.04 \pm 0.13)\,\mathrm{V}$$

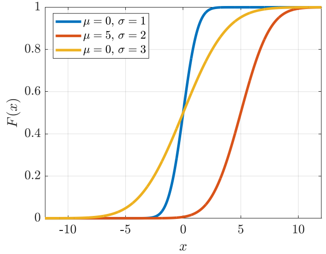
Session 2

Session 2

- Concepts de base
  - Erreur de mesure (aléatoire et systématique)
  - **Incertitude des mesures**
  - Évaluation des incertitudes des mesures électriques
  - Propagation de l'incertitude
- Statistiques appliquées aux mesures électriques
  - Fonction de densité de probabilité (pdf)
  - Représentation
  - Estimation de l'incertitude à partir de pdf
- Mesures électriques
  - Mesures de courant continu
  - Mesures de la tension continue
  - Mesures de résistance

Probability distributions

Definitions



- For a **continuous random variable,** we can define the **cumulative distribution function** (CDF) as the probability that the random variable X is less or equal to x.

$$F(x) = P(X \leq x)$$

- The **probability density function** (PDF) is defined as the derivative of the CDF.

$$f(x) = \frac{dF(x)}{dx}$$

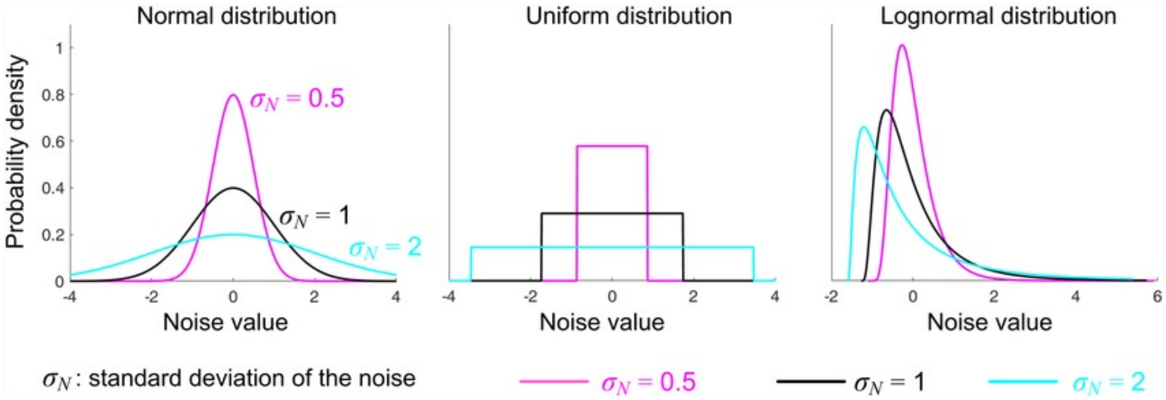
$$f(x) = P\left(x < X < +dx\right)$$

- From the PDF we can determine the probability that the random value X is in the range $[x_1, x_2]$.

$$P\left(x_1 < X < x_2\right) = \int_{x_1}^{x_2} f(x)\,\mathrm{d}x$$

$$P\left(-\infty < X < \infty\right) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = 1$$

Distributions de probabilités



Distributions de probabilités

Distribution normale

- Dans la nature, de nombreux phénomènes décrits par des variables aléatoires suivent une distribution **Normale ou Gaussienne**.
  - Poids et taille d'une population
  - Pression artérielle
  - Le taux de QI
  - **Mesure des quantités élémentaires**
- Le PDF d'une distribution normale a la forme suivante :

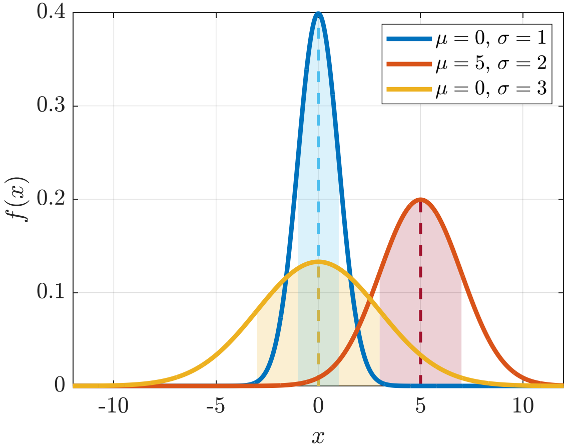
$$f(x) = \frac{1}{\boxed{\sigma}\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\boxed{\mu}}{\boxed{\sigma}}\right)^2\right]$$

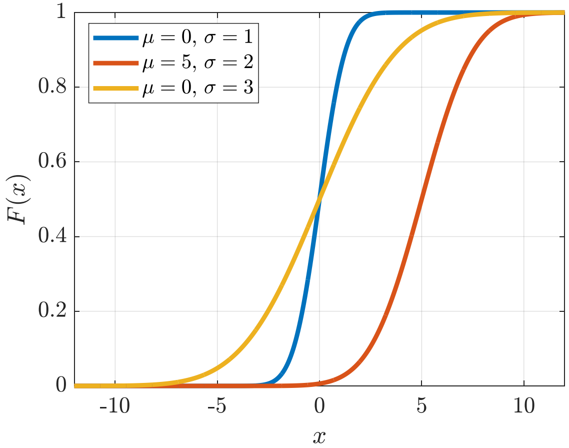
- μ est la **valeur attendue**, et c'est la valeur autour de laquelle toutes les variables aléatoires sont réparties. La distribution normale est symétrique autour de μ.
- σ est **l'écart-type**, et il s'agit d'une mesure de la dispersion des variables aléatoires autour de la valeur attendue.

Distributions de probabilités

Distribution normale

$$f\left(x\right)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^{2}\right]$$





$$\mu=\int_{-\infty}^{\infty}xf\left(x\right)\,\mathrm{d}x$$

$$V\left(x\right)=\sigma^{2}=\int_{-\infty}^{\infty}\left(x-\mu\right)^{2}f\left(x\right)\,\mathrm{d}x$$

Distributions de probabilités

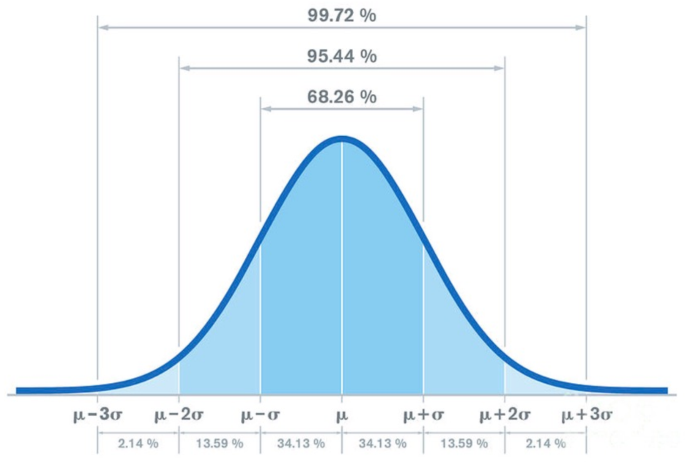
Distribution normale

$$P\left(x_1 < X < x_2\right) = \int_{x_1}^{x_2} f(x)\,\mathrm{d}x$$

$$P\left(\mu - \sigma < x < \mu + \sigma\right) = \int_{\mu-\sigma}^{\mu+\sigma} f(x)\,\mathrm{d}x = 68.26\,\%$$

$$P\left(\mu - 2\sigma < x < \mu + 2\sigma\right) = \int_{\mu-2\sigma}^{\mu+2\sigma} f(x)\,\mathrm{d}x = 95.44\,\%$$

$$P\left(\mu - 3\sigma < x < \mu + 3\sigma\right) = \int_{\mu-3\sigma}^{\mu+3\sigma} f(x)\,\mathrm{d}x = 99.72\,\%$$



Représentation de séries de mesures

Histogramme

- Dans la section précédente, nous avons expliqué comment le concept **d'incertitude** est strictement lié à une analyse statistique des mesures.
- L'histogramme est une représentation puissante d'un ensemble de mesures.
  - L'axe des abscisses décrit la valeur des mesures discrétisées en intervalles (généralement appelés « **bin** »)
  - L'axe des ordonnées représente le nombre d'occurrences (nombre) d'une mesure dans un « **bin** » spécifié
- Différentes normalisations sont possibles (‘count’, ‘cdf’, ‘pdf’,…).
- La fonction “histogram” dans Matlab

```
x = randn(100000,1);
figure
h = histogram(x,'Normalization','count');
xlabel('variable','Interpreter','latex')
ylabel('Count','Interpreter','latex')
```

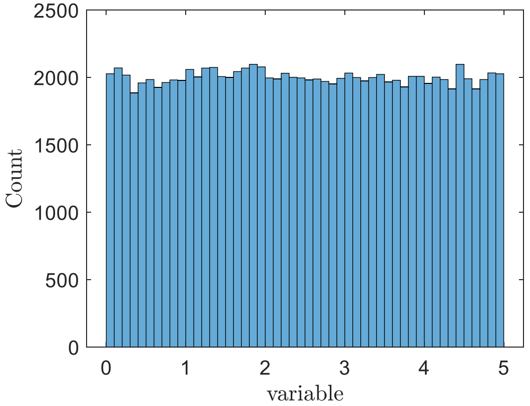
EPFL
SEL

Représentation de séries de mesures

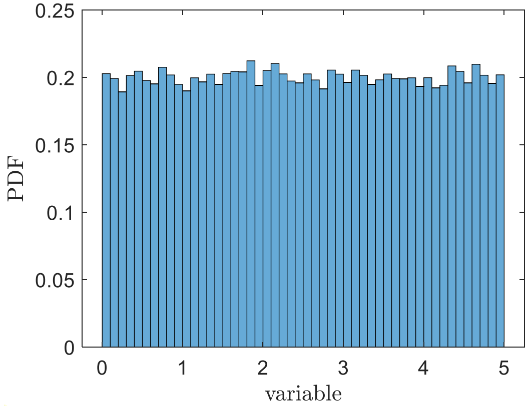
Histogramme

Sylvain Robert

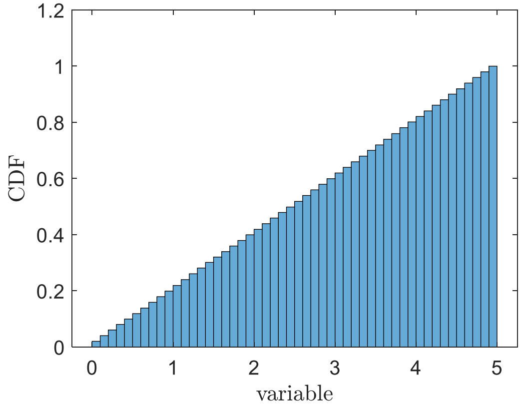
Histogrammes d'une variable aléatoire uniformément distribuée



Count



Probability density function (pdf)

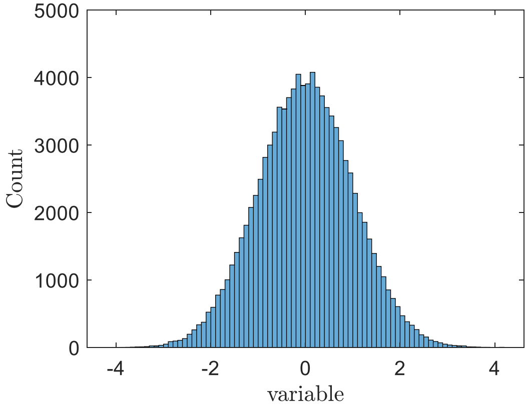


Cumulative distribution function (cdf)

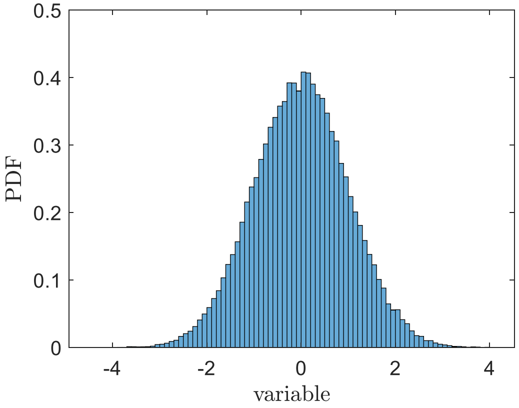
Représentation de séries de mesures

Histogramme

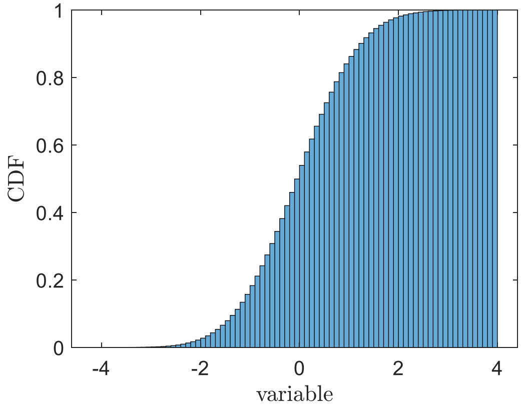
Histogrammes d'une variable aléatoire normalement distribuée



Count



Probability density function



Cumulative distribution function

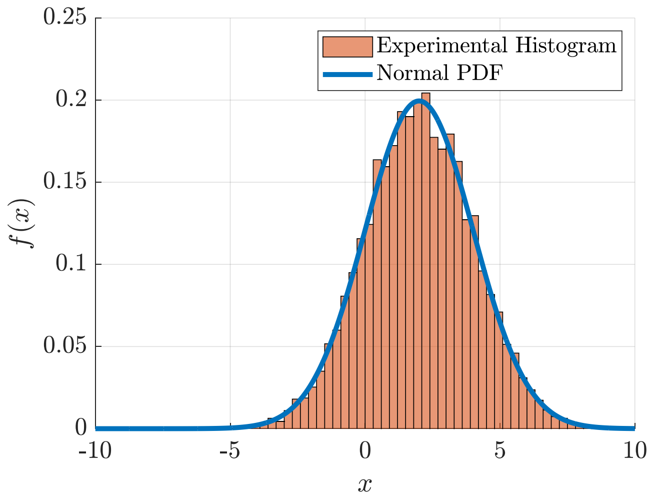
Distribution d'une série de mesures

- Nous avons collecté un ensemble d'échantillons dont la distribution de probabilité **peut être approximée** par une distribution normale.
- Son histogramme doit correspondre à une fonction de densité de probabilité normale.
- La meilleure estimation de la valeur attendue est la **moyenne arithmétique.**

$$\mu \simeq \bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

- La meilleure estimation de la “population standard deviation” est la racine carrée de la variance associée au processus de mesure (écart-type de l'échantillon).

$$\sigma = \sqrt{V(x)} \simeq s(x) = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}$$



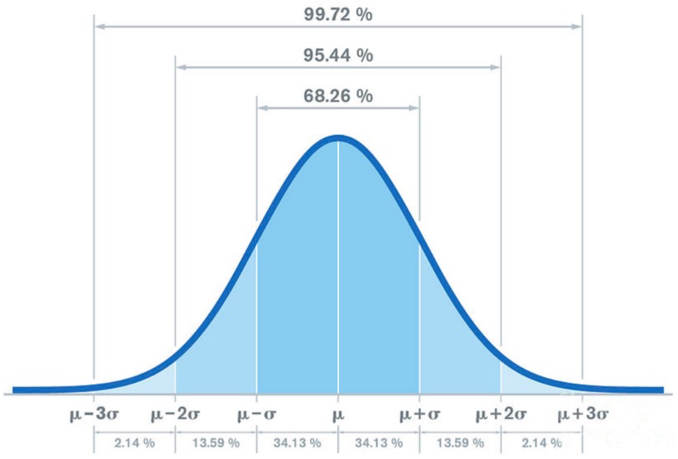
Distributions de probabilités

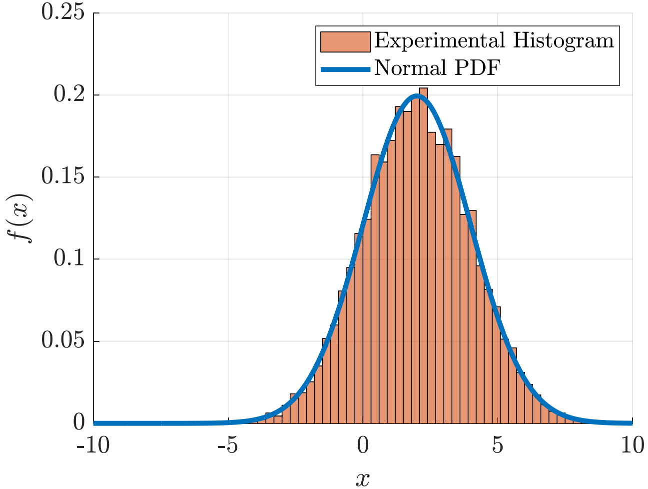
Distribution normale

$$P\left(\bar{x} - s\left(x\right) < x < \bar{x} + s\left(x\right)\right) = 68.26\,\%$$

$$P\left(\bar{x} - 2s\left(x\right) < x < \bar{x} + 2s\left(x\right)\right) = 95.44\,\%$$

$$P\left(\bar{x} - 3s\left(x\right) < x < \bar{x} + 3s\left(x\right)\right) = 99.72\,\%$$





Session 2

- Concepts de base
  - Erreur de mesure (aléatoire et systématique)
  - **Incertitude des mesures**
  - Évaluation des incertitudes des mesures électriques
  - Propagation de l'incertitude
- Statistiques appliquées aux mesures électriques
  - Fonction de densité de probabilité (pdf)
  - Représentation
  - Estimation de l'incertitude à partir de pdf
- Mesures électriques
  - Mesures de courant continu
  - Mesures de la tension continue
  - Mesures de résistance

Instruments de mesure

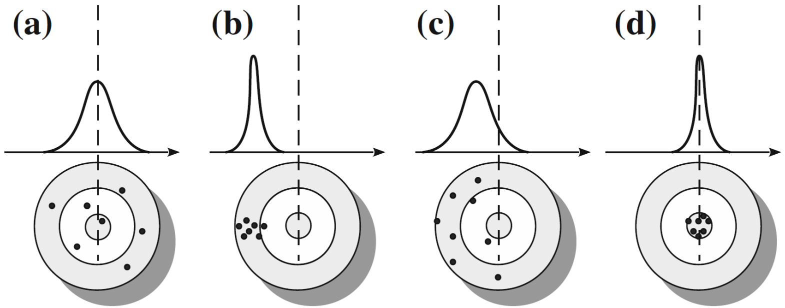
Définitions

- **Exactitude**: capacité de l'instrument à fournir pour la grandeur physique testée une valeur aussi proche que possible de sa « valeur réelle » (entendue comme la mesure obtenue avec une mesure de référence).
- **Précision** : Capacité d'un instrument à reproduire les mêmes résultats lorsqu'il est utilisé dans les mêmes conditions expérimentales. Peut également être appelé « répétabilité » ou « reproductibilité ».
- **Résolution** : la plus petite valeur de changement de la quantité physique que l'instrument peut détecter.
- **Plage de travail** : Intervalle des valeurs du mesurande pour lesquelles l'instrument peut effectuer le mesurage. La valeur maximale est appelée « pleine échelle » et la valeur minimale « seuil ».
- **Sensibilité** : rapport entre la variation de la réponse et la variation de la sollicitation.

$$S = \frac{dR}{dG}$$

Instruments de mesure

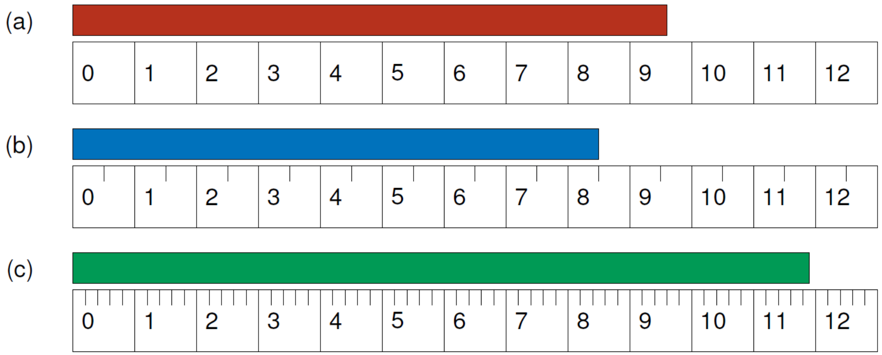
Définitions



- **a**: bonne exactitude mais pas précis
- **b**: précis mais pas peu d'exactitude
- **c**: peu d'exactitude et pas précis
- **d**: très bonne exactitude et précis

Instruments de mesure

Définitions



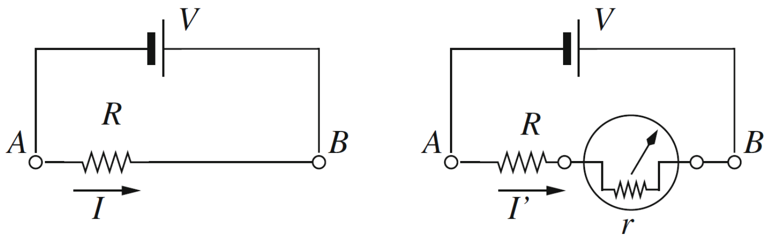
- Quelles sont les plages de travail et les résolutions des échelles a, b et c ?

Mesure de courant continu analogique

- L'instrument utilisé pour mesurer un courant continu est appelé **ampèremètre**.
  - Il peut être analogique ou numérique.
  - Il est inséré **en série** avec le conducteur traversé par le courant que l'on veut mesurer.
  - Son insertion **modifie le circuit d'origine** en raison de sa **résistance interne** r.

$$I' = \frac{V}{R+r} = \frac{V}{R}\left(\frac{1}{1+\frac{r}{R}}\right)$$

  - Il introduit une erreur **systématique** représentée par le terme entre parenthèses.
  - Seulement quand $r = 0$ le courant mesuré correspond au courant réel circulant dans le circuit.
  - En pratique $r \ll R$ et l'effet de la résistance interne de l'ampèremètre peut être négligée.

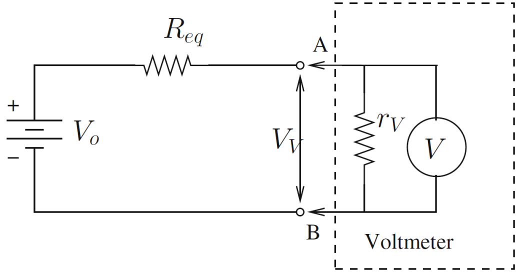


Mesure de tension DC analogique

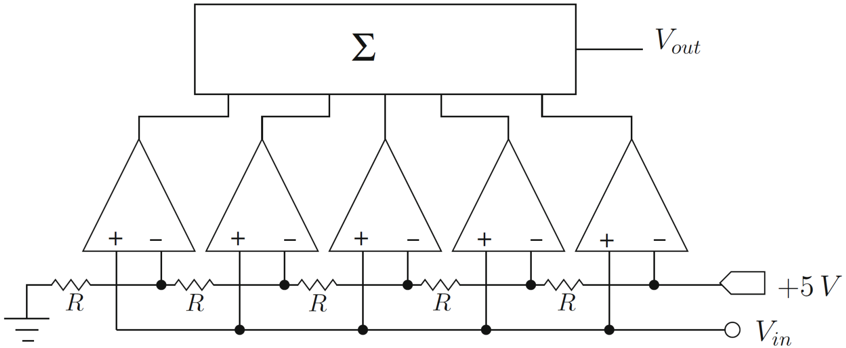
- L'instrument utilisé pour mesurer une tension continue est appelé **voltmètre**.
  - Il peut être analogique ou numérique.
  - Un voltmètre analogique n'est qu'un ampèremètre spécial.
  - Il est inséré en **parallèle** aux deux points aux bornes desquels existe la tension que l'on veut mesurer.
  - Son insertion **modifie le circuit d'origine** en raison de sa **résistance interne r_V**.

$$V_0 = \frac{R_{eq} + r_V}{r_V} V_V = \left(1 + \frac{R_{eq}}{r_V}\right) V_V$$

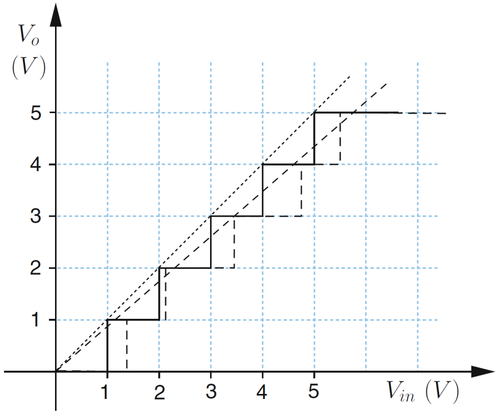
  - Il introduit une erreur systématique représentée par le terme entre parenthèses.
  - Dans la plupart des applications pratiques $R_{eq} \ll r_V$. Si ce n'est pas le cas, la connaissance de R_{eq} et r_V est nécessaire pour corriger l'erreur systématique.



Mesure de tension DC digitale



Input voltage (V)	Output voltage (V)	Average value of V_{in} (V)
$0 < V_{in} < 1$	$V_u = 0$	$\langle V_{in}\rangle = 0.5$
$1 < V_{in} \leq 2$	$V_u = 1$	$\langle V_{in}\rangle = 1.5$
$2 < V_{in} \leq 3$	$V_u = 2$	$\langle V_{in}\rangle = 2.5$
$3 < V_{in} \leq 4$	$V_u = 3$	$\langle V_{in}\rangle = 3.5$
$4 < V_{in} \leq 5$	$V_u = 4$	$\langle V_{in}\rangle = 4.5$
$5 < V_{in}$	$V_u = 5$	$\langle V_{in}\rangle = ??$



Mesure de résistances

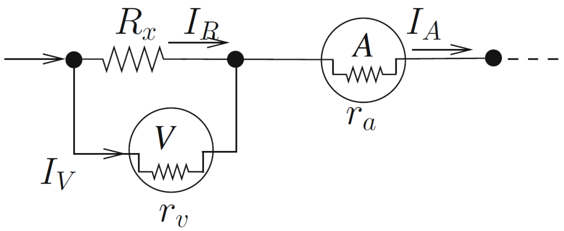
Méthode volt-ampèremétrique

- Mesure simultanée de la chute de tension (ΔV) aux bornes de la résistance et l'intensité du courant qui la traverse (I_R)
  - L'ampèremètre mesure la somme des courants qui traversent la résistance I_R et le courant traversant le voltmètre I_V
  - I_V représentent une erreur systématique qui doit être corrigée
  - Le résultat ne dépend pas de la résistance interne de l'ampèremètre r_a

$$R_x = \frac{\Delta V}{I_R} \qquad I_R = I_A \frac{r_V}{r_V + R_x}$$

$$R_x = \frac{\Delta V}{I_A}\left(1 + \frac{R_x}{r_V}\right)$$

$$R_x = \frac{\Delta V}{I_A}\left(\frac{1}{1 - \frac{\Delta V}{r_V I_A}}\right)$$



Références

[1] I. Gertsbakh, *Measurement Theory for Engineers*. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 2003. doi: 10.1007/978-3-662-08583-7.

[2] R. Bartiromo and M. De Vincenzi, *Electrical Measurements in the Laboratory Practice*. in Undergraduate Lecture Notes in Physics. Cham: Springer International Publishing, 2016. doi: 10.1007/978-3-319-31102-9.

[3] S. Tumański, *Principles of electrical measurement*. in Sensors series. New York, NY: Taylor & Francis, 2006.